

Prof. dr hab. inż. Witold Cecot  
Politechnika Krakowska  
Wydział Inżynierii Lądowej  
Katedra Technologii Informatycznych w Inżynierii  
e-mail: plcecot@cyf-kr.edu.pl  
tel. 12-628-2167

Kraków, 10.03.2025

**Opinia o rozprawie doktorskiej mgr. Dai Zhao zatytułowanej**  
***Parallelized space-time finite element method for reducing the effects of***  
***impact loads***

**Promotor: dr hab. Bartłomiej Dyniewicz, prof. IPPT PAN**

Niniejszą recenzję opracowałem na podstawie uchwały Rady Naukowej Dyscypliny Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN z dnia 12 grudnia 2024, egzemplarza rozprawy doktorskiej otrzymanej w styczniu 2025 r. oraz ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2023 r. poz. 742).

## **1 Przedmiot rozprawy**

Tematem rozprawy jest zastosowanie metody czaso-przestrzennych elementów skończonych (space-time finite element method - STFEM) do modelowania drgań mechanicznych, w szczególności wywołanych obciążeniem nagłym. Jest to ważne z praktycznego punktu widzenia zadanie mechaniki i pomimo istniejących wielu możliwości jego modelowania za pomocą programów komercyjnych, wciąż liczne aspekty teoretyczne oraz algorytmiczne wymagają udoskonalenia. Doktorant rozważał zadania dynamiki przy założeniu małych odkształceń ciał sprężystych i lepko-sprężystych. Zaproponował i prze-testował odpowiedni algorytm pozwalający na istotne przyspieszenie obliczeń dla elementów czasoprzestrzennych z aproksymacją pierwszego stopnia. Uzyskał dla tych elementów trójkątne macierze globalne i w związku z tym możliwość szybkiego obliczania stopni swobody przez rozwiązywanie pojedynczych równań z jedną niewiadomą, a także efektywnego stosowania obliczeń równoległych. Dla zadań nieliniowych, Autor rozprawy stosował, niezbędne w takich sytuacjach iteracyjne rozwiązywanie układów

równań nieliniowych, ale jedynie dla podmacierzy związanych z podobszarami wymagającymi nieliniowego modelu, np. w podobszarach w których pojawiają się odkształcenia niesprężyste.

## 2 Ocena pracy

Rozprawa składa się z kilku rozdziałów. Po sformułowaniu celu i zakresu pracy Doktorant przedstawił przegląd literatury dotyczącej rozwijanej tematyki, czyli zastosowania obliczeń równoległych i elementów czaso-przestrzennych w zadaniach dynamiki. W następnym rozdziale wyprowadzono odpowiednie sformułowanie słabe i omówiono wynikającą z niego dyskretyzację za pomocą elementów czaso-przestrzennych z funkcjami kształtu pierwszego stopnia oraz wyprowadzono wzory na macierze elementowe. Przedyskutowano podstawowe właściwości globalnego układu równań i wynikające z nich możliwe uproszczenia oraz przyspieszenia obliczeń numerycznych. W szczególności przedstawiono algorytm szybkiego obliczania stopni swobody, również w przypadku nieliniowym.

Zaproponowany algorytm został z powodzeniem przetestowany na przykładach pręta znajdującego się w jednoosiowym stanie naprężenia oraz tarczy w płaskim stanie naprężenia. Dla tego drugiego zadania rozważono nie tylko małe, ale również duże odkształcenia. Testy numeryczne potwierdziły poprawność i efektywność zastosowanego podejścia.

W kolejnym rozdziale omówiono szczegóły zrównoleglenia zaproponowanych algorytmów obliczeń numerycznych, wprowadzono pomocnicze macierze oraz algorytm podziału procesów obliczeń na mniejsze pakiety. Oszacowano również efektywność wprowadzonych ulepszeń.

W dalszej części rozprawy przedstawione są bardziej zaawansowane przykłady numeryczne związane z obciążeniem nagłym, motywowane projektowaniem materiałów redukujących wpływ gwałtownych obciążeń na sportowców. Analizowano przykład pręta z lokalnie zmienioną i ruchomą sztywnością oraz zadanie z meta-materiałem wykazującym lepko-plastyczne właściwości. Wykonano obliczenia dla tarczy z wieloma otworami, składającą się z dwóch podobszarów dla której w strefie możliwej niesprężystości materiału wprowadzono duże otwory mogące zamykać się przy dużych przemieszczeniach co prowadziło do dodatkowej nieliniowości jaką jest zadanie kontaktu. Podsumowanie, wnioski końcowe i rekomendacje na przyszłość zestawiono w końcowych rozdziałach dysertacji.

Podsumowując, tematyka pracy jest wciąż aktualna pomimo że analiza numeryczna zadań dynamiki jest rozwijane przez badaczy od wielu lat. Głównym osiągnięciem Doktoranta jest opracowanie algorytmu całkowania zadań dynamiki za pomocą czasoprzestrzennych elementów skończonych pierwszego stopnia pozwalającego na bardzo efektywne wykonywanie obliczeń w sposób równoległy.

Przy czytaniu rozprawy nasuwają się poniższe pytania.

1. Czy zaproponowany algorytm może być zastosowany dla wyższego stopnia aproksymacji?
2. Na początku rozdz. 3.1 Doktorant omawia dokładność analizy numerycznej zadań początkowo brzegowych. Pisze m.in. o wpływie obliczania macierzy mas (w sposób konsystentny albo prowadzący do ich diagonalnej postaci) na prędkość propagacji informacji. Jak należy rozumieć stwierdzenie, że dla równań parabolicznych nieskończona prędkość przekazywania informacji jest odpowiednia? Nie byłby to efekt fizycznie możliwy. Wspomniany przy okazji problem odbicia fal od brzegu siatki wydaje się być oddzielnym zagadnieniem. Jeżeli analizowany obszar jest nieograniczony to powinny być zastosowane odpowiednie metody eliminujące niefizyczny efekt odbicia od brzegu dyskretyzacji (np. metoda PML albo elementy nieskończone).
3. Jaka jest dokładność obliczeń dla testu z rozdz. 4.1.4, przedstawionych na rys. 4.9, 4.10 i wykazujących nieoczekiwane oscylacje? Czy analizowano zbieżność wyniku w zależności od wymiarów  $\Delta x$  i  $\Delta t$  elementów czasoprzestrzennych?
4. W przykładzie 4.15 z obszarem dwuwymiarowym zastosowano punktowe obciążenie i podpory. Nie jest to poprawnie postawiony zadanie, gdyż np. niezerowa reakcja na podporze punktowej jako siła skupiona powoduje, że dokładne rozwiązanie w tym punkcie ma wartość nieskończoną, a dając podporę oczekujemy przemieszczenia zerowego.
5. W przykładzie z poruszającym się podobszarem o zwiększonej sztywności siatka MES jest przeważnie niedostosowana do rozkładu sztywności. Jak to wpływa na dokładność i zbieżność wyników?
6. W podpisie do rys. 6.8, 6.9, 6.10 użyto sformułowania "the subjected free end". Czy jest to koniec pręta z obciążeniem? Jak wtedy rozumieć wykres siły wewnętrznej na tym końcu? Jeżeli jest tam przyłożona siła skupiona to siła osiowa jest jej równa.
7. W równiach (3.6), (3.7) pojawiają się sumy różnych macierzy (m.in. sztywności i mas). Czy mają zgodne jednostki?
8. Dlaczego macierze sztywności dla czworościanów w rozdz. 4.2.3.2 nie są kwadratowe?
9. Tytuł rozprawy *Zrównoleglona metoda elementów czaso-przestrzennych do redukcji efektów obciążeń uderowych* sugeruje moim zdaniem, że może chodzić o efekty numeryczne. Dopiero w rozdziale 6 Doktorant przedstawia motywację modelowania konstrukcji gwałtownie obciążonych jaką jest projektowanie meta materiałów redukujących wpływ obciążeń uderowych, np. na osoby uprawiające sport, a STFEM może usprawnić takie prace.

Poniżej zestawiono uwagi szczegółowe i redakcyjne.

- Wyprowadzenia dobrze znanych i prostych wzorów na liniowe funkcje kształtu w elementach trójkątnych (4.17, 4.19, 4.82, 4.83) wydają się niepotrzebne w rozprawie doktorskiej. Podobnie jak wyprowadzenia związków geometrycznych (4.63).
- Formalnie, macierze charakterystyczne (rozdz. 4.1.3 i 4.2.3) otrzymuje się przez agregację, a nie przez sumowanie macierzy dla elementów trójkątnych. Jakże są wzory na analogiczne charakterystyczne wektory obciążenia?
- Siła  $P$  zastosowana w przykładzie z rozdziału 4.1.4 nie występuje w sformułowaniu zadania. Warto ją uwzględnić na tym etapie.
- Na str. 87 przy obliczaniu całek z funkcji trygonometrycznych jest mowa o zastosowaniu twierdzenia l'Hospitala. W jakim sensie? Znane jest zastosowanie tego twierdzenia do obliczania granic ciągów.

### 3 Podsumowanie

W moim przekonaniu przedstawiona rozprawa doktorska stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego jakim jest całkowanie zadań dynamiki zarówno w zakresie liniowym jak i nieliniowym. Doktorant zaproponował i przetestował własny algorytm obliczeń równoległych znacznie zwiększający efektywność obliczeń, wykazał się w swoich badaniach dużą wiedzą z zakresu matematyki, informatyki oraz mechaniki i pokazał, że potrafi samodzielnie prowadzić badania naukowe.

Podniesione przeze mnie uwagi mają często charakter dyskusyjny i nie wpływają istotnie na moją w pełni pozytywną ocenę pracy. Wnoszę o przyjęcie opiniowanej rozprawy mgr. inż. Dai Zhao jako pracy doktorskiej i dopuszczenie jej do publicznej obrony w dyscyplinie Informatyka techniczna i telekomunikacja.

